ENSA d'Al-Hoceima — Année 2019/2020
AP-I, Première Année, — Semestre 2
Algèbre Linéaire, — TD1

Solution de la Série N^{o}1 : Espaces vectoriels, sous-espace vectoriel et base

Exercice 1

1. Soit F un sous $\mathbb{K}$-e.v. d'un espace vectoriel E. Existe-t-il un sous-espace vectriel G de E tel que
$$F \cap G = \emptyset.$$
2. Soit E et F deux $\mathbb{K}$-e.v. Montrer que l'addition des applications linéaires et la multiplication par un scalaire munissent $\mathcal{L}(E, F)$ d'une structure d'espace vectoriel.
3. Quelles sont les applications linéaires de $\mathbb{R}$ dans lui-même ? La loi
$$(f, g) \longmapsto f \circ g$$
définie dans $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ est-elle commutative ?

Solution :

1. Soit F un sous $\mathbb{K}$-e.v. d'un espace vectoriel E. Supposons qu'il existe un sous-espace vectriel G de E tel que $F \cap G = \emptyset$.
Comme F et G sont deux sous-espaces vectoriels, alors $0_E \in F$ et $0_E \in G$ donc $0_E \in F \cap G$ soit $0_E \in \emptyset$ ce qui est absurde car $\emptyset$ ne contient aucun élément. D'où l'hypothèse est fausse et enfin on ne pas trouver deux sous-espaces vectoriels dont l'intersection est vide.
2. Soit E et F deux $\mathbb{K}$-e.v. Montrons que $(\mathscr{L}(E, F), +, \times)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Cet ensemble est non vide car il contient l'application nulle $0_{E,F}$. Nous allons munir $\mathcal{L}(E, F)$ d'une structure "naturelle" d'espace vectoriel.
   (a) **Addition de deux applications linéaires** :
   Soit f et g deux applications linéaires de E dans F. Montrons que $f + g$ est encore linéaire ? Soit x et y deux vecteurs de E et $\lambda \in \mathbb{K}$.
   – Il en résulte de la linéarité de f et g :
$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$
   et
$$g(x + y) = g(x) + g(y),$$
   d'où
$$\begin{aligned} f(x + y) + g(x + y) &= f(x) + f(y) + g(x) + g(y) \\ &= (f + g)(x) + (f + g)(y) \end{aligned}$$

– La linéarité de f et g entraîne $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ et $g(\lambda x) = \lambda g(x)$, par suite

$$\begin{aligned} f(\lambda x) + g(\lambda x) &= \lambda f(x) + \lambda g(x) \\ &= \lambda \left(f(x) + g(x) \right) \\ (f+g)(\lambda x) &= \lambda \left(f + g \right)(x). \end{aligned}$$

Par suite, on définit une loi interne $(f, g) \longmapsto f + g$ sur $\mathcal{L}(E, F)$, que nous appelons **addition** de $\mathcal{L}(E, F)$.

(b) **Multiplication d'une application linéaire par un scalaire** :
Soit f une application linéaire de E dans F et $\lambda \in \mathbb{K}$ un scalaire. Nous allons montrer que l'application

$$\lambda.f : E \longmapsto F, \quad x \longmapsto \lambda.f(x)$$

est linéaire.

– Étant donné deux vecteurs x et y de E, la relation

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

entraîne

$$\begin{aligned} (\lambda.f)(x+y) &= \lambda.(f(x) + f(y)) \\ &= \lambda.f(x) + \lambda.f(y) \\ &= (\lambda.f)(x) + (\lambda.f)(y). \end{aligned}$$

– Soit μ un élément de $\mathbb{K}$. De la relation :

$$f(\mu.x) = \mu.f(x)$$

il en résulte

$$\begin{aligned} (\lambda.f)(\mu.x) &= \lambda.(f(\mu.x)) \\ &= \lambda.(\mu.f(x)) \\ &= (\lambda.\mu).f(x) = \mu.(\lambda.f(x)) \\ &= \mu.((\lambda.f)(x)), \end{aligned}$$

donc $\lambda.f$ est bien un élément de $\mathcal{L}(E, F)$. Par suite, on a défini sur $\mathcal{L}(E, F)$ une loi externe $(\lambda, f) \longmapsto \lambda.f$ ou $(\lambda \in \mathbb{K}$ et $f \in \mathcal{L}(E, F))$, de domaine $\mathbb{K}$, appelée **multiplication par un scalaire de** $\mathbb{K}$.

3. – les applications linéaires de $\mathbb{R}$ dans lui-même sont telles que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ et $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ pour tous x, y et λ dans $\mathbb{R}$, ces applications sont $x \mapsto ax$ avec $a \in \mathbb{R}$ fixé.

$$\mathscr{L}(\mathbb{R}) = \{f : x \mapsto ax, \quad a \in \mathbb{R}\}.$$

– La loi $(f, g) \longmapsto f \circ g$ définie dans $\mathscr{L}(\mathbb{R})$ est commutative, en effet : soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R})$ et $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R})$, alors il existe a et b dans $\mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f : x \mapsto ax$ et $g : x \mapsto bx$ donc

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(bx) = a(bx) = (ab)x = (ba)x = b(ax) = g(ax) = g(f(x)) = g \circ f(x)$$

car $(\mathbb{R}, \times)$ est commutatif,
d'où $f \circ g(x) = g \circ f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. D'où la loi $\circ$ est commutative dans $\mathscr{L}(\mathbb{R})$.

$\square$

Exercice 2

1. (a) Soit α, β et λ des nombres réels. Montrer que le système :

$$((1, \alpha, \beta),\ (0, 1, \lambda),\ (0, 0, 1))$$

est une base de $\mathbb{R}^3$

(b) Est-ce que le système :

$$((1, 2, 3),\ (2, 3, 4),\ (3, 4, 5))$$

est une base de $\mathbb{R}^3$

2. Soit u, v et w trois vecteurs linéairement indépendants d'un espace vectoriel E.

(a) Montrer que le système $(v+w, w+u, u+v)$ est libre. Le système $(v+w, w+u, u+v)$ est-t-il une base ?

(b) On suppose que E est de dimension 3.
Si (α, β, λ) est le système des coordonnées d'un vecteur x de E dans la base (u, v, w), quel est le système de coordonnées de x dans la base $(v + w, w + u, u + v)$?

Solution :

1. (a) Soit α, β et λ des nombres réels. Montrons que le système :

$$\{(1, \alpha, \beta),\ (0, 1, \lambda),\ (0, 0, 1)\}$$

est une base de $\mathbb{R}^3$:

– le système : $\{(1, \alpha, \beta),\ (0, 1, \lambda),\ (0, 0, 1)\}$ est libre, en effet soit a, b et c trois réels tels que $a(1, \alpha, \beta) + b(0, 1, \lambda) + c(0, 0, 1) = 0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0)$, montrons que $a = b = c = 0$?
On a

$$a(1, \alpha, \beta) + b(0, 1, \lambda) + c(0, 0, 1) = (a, a\alpha + b, a\beta + b\lambda + c) = (0, 0, 0),$$

donc

$$\begin{cases} a = 0 \\ a\alpha + b = 0 \\ a\beta + b\lambda + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

d'où $a = b = c = 0$, ce qui entraine que le système $\{(1, \alpha, \beta),\ (0, 1, \lambda),\ (0, 0, 1)\}$ est libre.

– On sait que le système $\{e_1 = (1,0,0),\ e_2 = (0,1,0),\ e_3 = (0,0,1)\}$ est une partie génératrice de $\mathbb{R}^3$, alors $u = (1,\alpha,\beta) = (1,0,0) + \alpha(0,1,0) + \beta(0,0,1)$ et $v = (0,1,0) + \lambda(0,0,1)$,
donc $u = e_1 + \alpha e_2 + \beta e_3$, $v = e_2 + \lambda e_3$ et $w = e_3$,
d'où $u = e_1 + \alpha(v - \lambda w) + \beta w$, $e_2 = v - \lambda w$ et $w = e_3$, soit

$$\begin{cases} e_3 = w \\ e_2 = v - \lambda w \\ e_1 = u + \alpha v + (\beta - \alpha\lambda) w \end{cases}$$

Pour tout $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^3$, il existe a, b et c dans $\mathbb{R}$ tels que $\mathrm{x} = ae_1 + be_2 + ce_3$, donc

$$\mathrm{x} = a(u + \alpha v + (\beta - \alpha\lambda)w) + b(v - \lambda w) + cw$$

d'où

$$\mathrm{x} = a'u + b'v + c'w$$

avec $a' = a$, $b' = \alpha a + b$ et $c' = c + \beta a - \lambda(\alpha a + b)$, ce qui prouve que le système $\{u = (1,\alpha,\beta),\ v = (0,1,\lambda),\ w = (0,0,1)\}$ engendre $\mathbb{R}^3$.

Finalement, le système $\{u = (1,\alpha,\beta),\ v = (0,1,\lambda),\ w = (0,0,1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(b) Soit le système $\{u = (1,2,3),\ v = (2,3,4),\ w = (3,4,5)\}$, pour que ce système soit une base de $\mathbb{R}^3$, il faut que ce système soit libre et générateur de $\mathbb{R}^3$, soit α, β et γ des réels tels que $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0_{\mathbb{R}^3}$,
a-t-on $\alpha = \beta = \gamma = 0$?

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = (\alpha + 2\beta + 3\gamma, 2\alpha + 3\beta + 4\gamma, 3\alpha + 4\beta + 5\gamma) = (0,0,0)$$

donc

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + 3\gamma = 0 \\ 2\alpha + 3\beta + 4\gamma = 0 \\ 3\alpha + 4\beta + 5\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -2\beta - 3\gamma \\ 2(-2\beta - 3\gamma) + 3\beta + 4\gamma = 0 \\ 3(-2\beta - 3\gamma) + 4\beta + 5\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = -2\beta - 3\gamma \\ -\beta - 2\gamma = 0 \\ -2\beta - 4\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \gamma \\ \beta = -2\gamma \end{cases}$$

ce qui prouve que le triplet de scalaires (α,β,γ) vérifiant $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0_{\mathbb{R}^3}$ est la droite d'équation

$$\begin{cases} \alpha = \gamma \\ \beta = -2\gamma \end{cases}$$

ce qui montre que pour $\gamma = 1 \neq 0$, on a $\alpha = 1 \neq 0$ et $\beta = -2 \neq 0$, puis on aura

$$(1 - 2 + 3, 2 - 6 + 4, 3 - 8 + 5) = (0,0,0)$$

c'est à dire que le système $\{u = (1,2,3),\ v = (2,3,4),\ w = (3,4,5)\}$ est lié (n'est pas libre), Enfin ce système ne peut pas être une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Soit u, v et w trois vecteurs linéairement indépendants d'un espace vectoriel E.

(a) – Montrons que le système $(v+w, w+u, u+v)$ est libre : soit a, b et c trois scalaires tels que $a(v+w)+b(w+u)+c(u+v)=0_E$, montrons que $a=b=c=0$.

$$a(v+w)+b(w+u)+c(u+v)=(b+c)u+(a+c)v+(a+b)w=0_E$$

car $(E,+)$ est un groupe,
comme $\{u,v,w\}$ est un système libre, alors

$$\left\{\begin{array}{l} b+c=0 \\ a+c=0 \\ a+b=0 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad a=b=c=0$$

ce qui prouve que le système $\{v+w, w+u, u+v\}$ est libre.

– Le système $\{v+w, w+u, u+v\}$ n'est pas forcément une base de E, en effet on peut prendre $v+w=e_1=(1,0,0,0)$,$w+u=e_2=(0,1,0,0)$ et $u+v=e_3=(0,0,0,1)$ dans $E=\mathbb{R}^4$, alors le système $\{v+w, w+u, u+v\}$ est libre dans E , mais il n'est pas une base de E car on ne connait pas la dimension de E.

(b) Supposons que E est de dimension 3. Soit (α,β,λ) le système des coordonnées d'un vecteur x de E dans la base (u,v,w), soit (a,b,c) le système de coordonnées de x dans la base $(v+w, w+u, u+v)$, calculons a, b et c en fonction de α, β et γ. On a $\mathrm{x}=\alpha v+\beta w+\gamma u$ d'une part et d'autre part $\mathrm{x}=a(v+w)+b(w+u)+c(u+v)=(b+c)u+(a+c)v+(a+b)w$, donc

$$\alpha v+\beta w+\gamma u=(b+c)u+(a+c)v+(a+b)w$$

comme le système $\{u,v,w\}$ est un système libre, alors

$$\left\{\begin{array}{l} b+c=\alpha \\ a+c=\beta \\ a+b=\gamma \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} a=\frac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha) \\ b=\frac{1}{2}(\gamma+\alpha-\beta) \\ c=\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma) \end{array}\right.$$

D'où le système de coordonnées (a,b,c) donné par les expressions qu'on vient de trouver.

$\square$

Exercice 3

Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des fonctions numériques, définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $\mathcal{D}$ est un sous-espace de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.
2. Soit $\varphi : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R})$ l'application qui à une fonction $f \in \mathcal{D}$ associe la fonction dérivée f'. Montrer que φ est linéaire.
3. L'application φ est-elle injective ? surjective ?

Solution :

Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des fonctions numériques, définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$.

1. Montrons que $\mathcal{D}$ est un sous-espace de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$:

– Tout d'abord $\mathcal{D} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R})$, en effet toute fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ est une fonction numérique, donc $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$, d'où $\mathcal{D}$ est un sous-ensemble de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.
– $\mathcal{D} \neq \emptyset$ car la fonction nulle 0 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, donc la fonction nulle est un élément de $\mathcal{D}$.
– Soit f et g dans $\mathcal{D}$ et λ un réel. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x) \quad \text{et} \quad (\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$$

donc $f + g \in \mathcal{D}$ et $\lambda f \in \mathcal{D}$. Ce qui prouve que $\mathcal{D}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.

2. Soit $\varphi : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R})$ l'application qui à une fonction $f \in \mathcal{D}$ associe la fonction dérivée f'. Montrons que φ est linéaire : soit f et g dans $\mathcal{D}$ et λ un réel, alors on a
– $[\varphi(f+g)](x) = (f+g)'(x) = f'(x)+g'(x) = [\varphi(f)](x)+[\varphi(g)](x) = [\varphi(f)+\varphi(g)](x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc $\varphi(f+g) = \varphi(f) + \varphi(g)$.
– $[\varphi(\lambda f)](x) = (\lambda f)'(x) = \lambda f'(x) = [\lambda\varphi(f)](x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc $\varphi(\lambda f) = \lambda\varphi(f)$.
D'où φ est linéaire.

3. – L'application φ n'est pas injective, en effet, en prenant $h = f + 5$ et $g = f + 6$ deux fonctions dans $\mathcal{D}$, alors on a $\varphi(h) = f' = \varphi(g)$ mais $h \neq g$ car sinon $f(x)+5 = f(x)+6$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et donc $1 = 0$ ce qui est absurde.
– L'application φ est injective, en effet, soit g dans $\mathcal{F}(\mathbb{R})$, existe-t-elle une fonction f dans $\mathcal{D}$ telle que $g = \varphi(f)$. On a $g = \varphi(f) = f'$, alors $g(t) = f'(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, donc $f(x) = f(0) + \int_0^x g(t)dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. D'où il existe une fonction f dans $\mathcal{D}$ vérifiant $g = \varphi(f)$, cette fonction est $f(x) = f(0) + \int_0^x g(t)dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$\square$

Exercice 4

1. Soit E un espace vectoriel non nul. On note $\mathcal{H}(E)$ l'ensemble des homothéties vectorielles de E sur lui-même. Montrer que $\mathcal{H}(E)$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$.
2. Soit $h \in \mathcal{H}(E)$. Montrer que :

$$(\forall f \in \mathrm{GL}(E)), \quad f^{-1} \circ h \circ f \in \mathcal{H}(E)$$

3. Montrer que si $E = \mathbb{R}$ est la droite vectorielle, alors $\mathcal{H}(\mathbb{R}) = \mathrm{GL}(\mathbb{R})$.

Solution :

1. Soit E un espace vectoriel non nul et $(\mathbf{GL}(E), \circ)$ le groupe des endomorphismes bijectifs de l'espace vectoriel E, on note $\mathcal{H}(E)$ l'ensemble des homothéties vectorielles de E sur lui-même. Montrons que $\mathcal{H}(E)$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$. Soit f dans $\mathcal{H}(E)$, alors il existe λ un scalaire tel que $f(x) = \lambda x$ pour tout $x \in E$, le paramètre λ s'appelle le rapport de l'homthétie.
– $\mathcal{H}(E) \neq \emptyset$ car l'application identique $\mathrm{id} : E \to E$ est une homothétie vectorielle de rapport $\lambda = 1$ appartient à $\mathcal{H}(E)$. Donc id est l'élément neutre de $\mathcal{H}(E)$.
– Soit f et g dans $\mathcal{H}(E)$, alors il existe α et β des scalaires tels que $f(x) = \alpha x$ et $g(x) = \beta x$ pour tout x dans E. On a

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = \alpha g(x) = \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$$

on pose $\lambda = \alpha\beta$ alors $f \circ g(x) = \lambda x$ pour tout x dans E. Ce qui prouve que $f \circ g$ est une homothétie de rapport $\lambda = \alpha\beta$, soit $f \circ g \in \mathcal{H}(E)$ pour tout f et g dans $\mathcal{H}(E)$.

– Soit f dans $\mathcal{H}(E)$, existe-t-il un élément g dans $\mathcal{H}(E)$ tel que $f \circ g = \mathrm{id}$. Soit $x \in E$ et $f(x) = \alpha x$ avec $\alpha \neq 0$ alors

$$f \circ g(x) = \alpha g(x) = x$$

donc $g(x) = \frac{1}{\alpha}x$, d'où g est une homothétie de rapport $\lambda = \frac{1}{\alpha}$, ce qui montre que pour toute homothétie f de rapport $\alpha \neq 0$, il existe une et une seule homothéite g de rapport $\frac{1}{\alpha}$ telle que $f \circ g = g \circ f = \mathrm{id}$

ce qui prouve que $\mathcal{H}(E)$ est un sous-groupe de $(\mathbf{GL}(E), \circ)$.

2. Soit $h \in \mathcal{H}(E)$, montrons que :

$$(\forall f \in \mathrm{GL}(E)), \quad f^{-1} \circ h \circ f \in \mathcal{H}(E)$$

On a $h \in \mathcal{H}(E)$, alors il existe $\lambda \neq 0$ tel que $h(x) = \lambda x$, pour tout x dans E.
Soit $f \in \mathrm{GL}(E)$, on a $f^{-1} \circ h \circ f(x) = f^{-1}(h(f(x))) = f^{-1}(\lambda f(x)) = f^{-1}(f(\lambda x)) = f^{-1} \circ f(\lambda x)$ car f est linéaire et bijectif, d'où

$$f^{-1} \circ h \circ f(x) = \lambda x = h(x), \quad \forall x \in E$$

d'où $(\forall f \in \mathrm{GL}(E)), \quad f^{-1} \circ h \circ f \in \mathcal{H}(E)$, ce qui prouve que $\mathcal{H}(E)$ est un sous-groupe distingué dans $\mathbf{GL}(E)$.

3. Soit $E = \mathbb{R}$ la droite vectorielle, montrer que $\mathcal{H}(\mathbb{R}) = \mathrm{GL}(\mathbb{R})$: les endomorphismes de $\mathbb{R}$ sont les applications linéaires sur $\mathbb{R}$ de la forme $f(x) = ax$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ où $a \in \mathbb{R}$ est fixé. Alors

$$\mathrm{GL}(\mathbb{R}) = \{f : x \mapsto ax \,/\, a \neq 0\}$$

donc pour tout $g \in \mathrm{GL}(\mathbb{R})$, il existe $\alpha \neq 0$ un réel tel que $g(x) = \alpha x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$,
d'où $g \in \mathcal{H}(E)$ c'est à dire $\mathrm{GL}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{H}(E)$,
et comme $\mathcal{H}(E) \subset \mathrm{GL}(\mathbb{R})$. Finalement $\mathrm{GL}(\mathbb{R}) = \mathcal{H}(E)$.

□

Exercice 5

1. Soit E un espace vectoriel de dimension 2 et (i, j) une base de E. Soit f et g deux endomorphisme de E définis respectivement par :

$$\begin{cases} f(i) &= i + 2j, \\ f(j) &= 4i + 5j, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} g(i) &= 5i + 6j \\ g(j) &= 7i + 8j. \end{cases}$$

Soit $v = x.i + y.j$ (où $(i, j) \in \mathbb{R}^2$) un vecteur de E.
Quelles sont les composantes sur la base (i, j) des vecteurs suivants :

$$f(v); \quad g(v); \quad (5.f(v) - 4.g(v)); \quad (2.f - id_E)(v); \quad (-f + \pi.g)(v).$$

2. Soit S et T les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ engendrés respactivement par les vecteurs :

$$S = \overline{< (1, -1, 2); (1, 1, 2); (3, 6, -6) >},$$

$$T = \overline{< (0, -2, -3); (1, 0, 1) >}$$

Quelles sont les dimensions de S, T et $S \cap T$?

Solution :

1. Soit E un espace vectoriel de dimension 2 et (i,j) une base de E. Soit f et g deux endomorphisme de E définis respectivement par :

$$\left\{\begin{array}{ll} f(i) & = i+2j, \\ f(j) & = 4i+5j, \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{ll} g(i) & = 5i+6j \\ g(j) & = 7i+8j. \end{array}\right.$$

Soit $v = x.i + y.j$ (où $(i,j) \in \mathbb{R}^2$) un vecteur de E.
Les composantes des vecteurs suivants :

$$f(v); \quad g(v); \quad (5.f(v) - 4.g(v)); \quad (2.f - id_E)(v); \quad (-f + \pi.g)(v).$$

relativement à la base (i,j).

- $f(v) = f(x.i+y.j) = xf(i) + yf(j) = x(i+2j) + y(4i+5j) = (x+4y)i + (2x+5y)j$, alors les coordonnées du vecteur $f(v)$ sont $(x+4y, 2x+5y)$.
- $g(v) = g(x.i+y.j) = xg(i)+yg(j) = x(5i+6j)+y(7i+8j) = (5x+7y)i+(6x+8y)j$, alors les coordonnées du vecteur $f(v)$ sont $(5x+7y, 6x+8y)$.
- $5.f(v) - 4.g(v) = 5(x+4y)i + 5(2x+5y)j - 4(5x+7y)i - 4(6x+8y)j = [5x+20y - 20x - 28y]i + [10x+25y-24x-32y]j = (-15x-8y)i + (-14x-7y)j$, alors les coordonnées du vecteur $f(v)$ sont $(-15x-8y, -14x-7y)$.
- $(2.f - id_E)(v) = 2f(v) - v = 2(xf(i)+yf(j)) - xi - yj = 2x(i+2j)+2y(4i+5j) - xi - yj = (2x+8y-x)i + (4x+10y-y)j = (x+8y)i + (4x+9y)j$, alors les coordonnées du vecteur $f(v)$ sont $(x+8y, 4x+9y)$.
- $(-f+\pi.g)(v) = -f(v)+\pi g(v) = -(x+4y)i - (2x+5y)j + \pi(5x+7y)i + \pi(6x+8y)j = (-x-4y+5\pi x+7\pi y)i + (-2x-5y+6\pi x+8\pi y)j$, alors les coordonnées du vecteur $f(v)$ sont $(-x-4y+5\pi x+7\pi y, -2x-5y+6\pi x+8\pi y)$.

2. Soit S et T les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ donnés par : $S = \overline{<(1,-1,2);(1,1,2);(3,6,-6)>}$, $T = \underline{<(0,-2,-3);(1,0,1)>}$, respectivement. Les dimensions des espaces S, T et $S \cap T$:

– l'ensemble S est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par le système $\{(1,-1,2);(1,1,2);(3,6,-6)\}$, mais pour que ce système soit une base de S il faut que le système $\{(1,-1,2);(1,1,2);(3,6,-6)\}$ soit libre ; en effet, soit α, β et γ des scalaires tels que $\alpha(1,-1,2) + \beta(1,1,2) + \gamma(3,6,-6) = (0,0,0)$: A-t-on $\alpha = \beta = \gamma = 0$?
On a $\alpha(1,-1,2)+\beta(1,1,2)+\gamma(3,6,-6) = (\alpha+\beta+3\gamma, -\alpha+\beta+6\gamma, 2\alpha+2\beta-6\gamma) = (0,0,0)$ alors

$$\left\{\begin{array}{rl} \alpha+\beta+3\gamma & = 0 \\ -\alpha+\beta+6\gamma & = 0 \\ 2\alpha+2\beta-6\gamma & = 0. \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{r} 2\beta+9\gamma = 0 \\ -12\gamma = 0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{r} \beta = 0 \\ \gamma = 0. \end{array}\right.$$

donc $\alpha = 0$; ce qui montre que $\alpha = \beta = \gamma = 0$ ainsi le système $\{(1,-1,2);(1,1,2);(3,6,-6)\}$ est libre ; d'où le sous-espace vectoriel S a pour base le système $\{(1,-1,2);(1,1,2);(3,6,-6)\}$, soit $\dim_{\mathbb{R}}(S) = 3$.
Remarque : On a $\dim_{\mathbb{R}}(S) = 3$, alors S est isomorphe à $\mathbb{R}^3$ et comme le système $\{(1,-1,2);(1,1,2);(3,6,-6)\}$ est formé de vecteurs dans $\mathbb{R}^3$, alors $\{(1,-1,2);(1,1,2);(3,6,-6)\}$ serait une base de $\mathbb{R}^3$; d'où $S = \mathbb{R}^3$.

– l'ensemble T est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par le système $\{(0,-2,-3);(1,0,1)\}$, mais pour que ce système soit une base de T il faut que le système $\{(1,-1,2);(1,1,2);(3,6,-6)\}$ soit libre ; en effet, soit α et β des scalaires tels que $\alpha(0,-2,-3)+\beta(1,0,1) = (0,0,0)$:

A-t-on $\alpha = \beta = \gamma = 0$?
On a $\alpha(0,-2,-3) + \beta(1,0,1) = (\beta, -2\alpha, -3\alpha+\beta) = (0,0,0)$ alors

$$\left\{\begin{array}{rl} \beta & = 0 \\ -2\alpha & = 0 \\ -3\alpha+\beta & = 0. \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{ll} \alpha & = 0 \\ \beta & = 0 \end{array}\right.$$

donc $\alpha = \beta = 0$,
ce qui montre que le système $\{(0,-2,-3);(1,0,1)\}$, ainsi le système $\{(0,-2,-3);(1,0,1)\}$ est une base de T, soit $\dim_{\mathbb{R}}(T) = 2$.

– On a $T = \overline{\{(0,-2,-3);(1,0,1)\}}$ et $S = \overline{\{(1,-1,2);(1,1,2);(3,6,-6)\}}$. On vient de voir que $\dim_{\mathbb{R}}(S) = 3$, alors S est isomorphe à $\mathbb{R}^3$ et comme le système

$$\{(1,-1,2);(1,1,2);(3,6,-6)\}$$

est formé de vecteurs dans $\mathbb{R}^3$, alors $\{(1,-1,2);(1,1,2);(3,6,-6)\}$ serait une base de $\mathbb{R}^3$; d'où $S = \mathbb{R}^3$ ceci d'une part et d'autre on a $T = \overline{\{(0,-2,-3);(1,0,1)\}}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$; donc T est inclus dans S soit $S \cap T = T$; d'où $\dim_{\mathbb{R}}(S \cap T) = \dim_{\mathbb{R}}(T) = 2$.

$\square$

Exercice 6

1. Soit (e_1, e_2, e_3) la base naturelle de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que :

$$f(e_1) = e_1 - e_2; \quad f(e_2) = -e_2 + e_3 \quad \text{et} \quad f(e_3) = e_2 + e_3.$$

   Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$.

2. Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et (i,j,k) une base de E. Soit f l'endomorphisme de E tel que :

$$f(i) = \frac{1}{3}[2i+2j-k]\,; \quad f(j) = \frac{1}{3}[2i-j+2k]\,; \quad f(k) = \frac{1}{3}[-i+2j+2k]\,.$$

   (a) Montrer que $f^2 = id_E$. Déterminer $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$.

   (b) Déterminer une autre base (e_1, e_2, e_3) de E telle que l'on ait :

$$f(e_1) = e_1, \quad f(e_2) = e_2, \quad f(e_3) = -e_3.$$

Solution :

1. Soit (e_1, e_2, e_3) la base naturelle de $\mathbb{R}^3$ et $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que :

$$f(e_1) = e_1 - e_2; \quad f(e_2) = -e_2 + e_3 \quad \text{et} \quad f(e_3) = e_2 + e_3.$$

   Déterminons $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$: soit $v \in \mathbb{R}^3$, alors il existe (x,y,z) unique tel que $v = xe_1 + ye_2 + ze_3$. D'après la linéarité de f on a

$$f(v) = xf(e_1)+yf(e_2)+zf(e_3) = x(e_1-e_2)+y(-e_2+e_3)+z(e_2+e_3) = xe_1+(-x-y+z)e_2+(y+z)e_3$$

– Soit $v \in \mathrm{Ker}(f)$ alors $f(v) = 0_{\mathbb{R}^3}$, soit $xe_1 + (-x-y+z)e_2 + (y+z)e_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$; comme $\{e_1, e_2, e_3\}$ est libre alors

$$\left\{\begin{array}{rl} x & = 0 \\ -x-y+z & = 0 \\ y+z & = 0. \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{rl} x & = 0 \\ -y+z & = 0 \\ y+z & = 0. \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad x = y = z = 0$$

d'où $v = 0_{\mathbb{R}^3}$, soit $\mathrm{Ker}(f) \subset \{0_{\mathbb{R}^3}\}$;
et comme $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, alors $\{0_{\mathbb{R}^3}\} \subset \mathrm{Ker}(f) \subset \{0_{\mathbb{R}^3}\}$,
Finalement $\mathrm{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$; on peut prendre par convention $\{0_{\mathbb{R}^3}\}$ comme base de $\mathrm{Ker}(f)$.

– On a $\{e_1, e_2, e_3\}$ est la base naturelle de $\mathbb{R}^3$, alors $\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}$ engendre $\mathrm{Im}(f) = f(\mathbb{R}^3)$.
Le système $\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}$ est-il libre ? Soit (x, y, z) un système de scalaires tels que

$$xf(e_1)+yf(e_2)+zf(e_3) = x(e_1-e_2)+y(-e_2+e_3)+z(e_2+e_3) = xe_1+(-x-y+z)e_2+(y+z)e_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$$

comme $\{e_1, e_2, e_3\}$ est libre alors

$$\left\{\begin{array}{rl} x & = 0 \\ -x-y+z & = 0 \\ y+z & = 0. \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{rl} x & = 0 \\ -y+z & = 0 \\ y+z & = 0. \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad x = y = z = 0$$

donc le système $\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}$ est libre. Finalement le système $\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}$ est libre et engendre $\mathrm{Im}(f)$ à la fois, soit le système $\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

2. Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et (i, j, k) une base de E. Soit f l'endomorphisme de E tel que :

$$f(i) = \frac{1}{3}\left[2i + 2j - k\right]; \quad f(j) = \frac{1}{3}\left[2i - j + 2k\right]; \quad f(k) = \frac{1}{3}\left[-i + 2j + 2k\right].$$

(a) Soit $v \in E$, alors $v = xi + yj + zk$ est la combinaison linéaire unique du vecteur v relativement à la base $\{i, j, k\}$ de E.
D'après la linéarité de f on a

$$f(v) = xf(i)+yf(j)+zf(k) = \frac{1}{3}x\left[2i + 2j - k\right]+\frac{1}{3}y\left[2i - j + 2k\right]+\frac{1}{3}z\left[-i + 2j + 2k\right]$$

donc

$$f(v) = \frac{1}{3}(2x + 2y - z)i + \frac{1}{3}(2x - y + 2z)j + \frac{1}{3}(-x + 2y + 2z)k$$

– Montrons que $f^2 = id_E$: d'après la linéarité de f, on a

$$\begin{aligned} f \circ f(j) &= f(f(j)) = f\left(\frac{1}{3}\left[2i + 2j - k\right]\right) = \frac{1}{3}\left[2f(i) + 2f(j) - f(k)\right] \\ &= \frac{2}{9}\left[2i + 2j - k\right] + \frac{2}{9}\left[2i - j + 2k\right] - \frac{1}{9}\left[-i + 2j + 2k\right] \\ &= \left(\frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9}\right)i + \left(\frac{4}{9} - \frac{2}{9} - \frac{2}{9}\right)j + \left(-\frac{2}{9} + \frac{4}{9} - \frac{2}{9}\right)k \end{aligned}$$

d'où $f \circ f(i) = i$

$$\begin{aligned} f \circ f(i) &= f(f(i)) = f\left(\frac{1}{3}[2i - j + 2k]\right) = \frac{1}{3}[2f(i) - f(j) + 2f(k)] \\ &= \frac{2}{9}[2i + 2j - k] - \frac{1}{9}[2i - j + 2k] + \frac{2}{9}[-i + 2j + 2k] \\ &= \left(\frac{4}{9} - \frac{2}{9} - \frac{2}{9}\right) i + \left(\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9}\right) j + \left(-\frac{2}{9} - \frac{2}{9} + \frac{4}{9}\right) k \end{aligned}$$

d'où $f \circ f(j) = j$

$$\begin{aligned} f \circ f(k) &= f(f(k)) = f\left(\frac{1}{3}[-i + 2j + 2k]\right) = \frac{1}{3}[-f(i) + 2f(j) + 2f(k)] \\ &= -\frac{1}{9}[2i + 2j - k] + \frac{2}{9}[2i - j + 2k] + \frac{2}{9}[-i + 2j + 2k] \\ &= \left(-\frac{2}{9} + \frac{4}{9} - \frac{2}{9}\right) i + \left(-\frac{2}{9} - \frac{2}{9} + \frac{4}{9}\right) j + \left(\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9}\right) k \end{aligned}$$

d'où $f \circ f(k) = k$, ceci d'une part et d'autre part pour tout $v \in E$ on a

$$f \circ f(v) = f(f(v)) = xf \circ f(i) + yf \circ f(j) + zf \circ f(k) = xi + yj + zk = v$$

car $f \circ f$ est linéaire, d'où $f \circ f = \mathrm{Id}_E$.

– Déterminons $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$:

$$\mathrm{Ker}(f) = \{v \in E \,/\, f(v) = 0_E\}$$

On a $f(v) = \frac{1}{3}(2x + 2y - z)i + \frac{1}{3}(2x - y + 2z)j + \frac{1}{3}(-x + 2y + 2z)k$, alors

$$\frac{1}{3}(2x + 2y - z)i + \frac{1}{3}(2x - y + 2z)j + \frac{1}{3}(-x + 2y + 2z)k = 0_E$$

donc

$$\left\{\begin{array}{ll} 2x + 2y - z & = 0 \\ 2x - y + 2z & = 0 \\ -x + 2y + 2z & = 0. \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{ll} z & = 2(x + y) \\ y & = 2(x + z) \\ x & = 2(y + z). \end{array}\right.$$

car le système $\{i, j, k\}$ est libre dans E, d'où

$$\mathrm{Ker}(f) : \quad x = y = z = 0$$

d'où $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$ qui est le sous-espace vectoriel propre nul de E.
L'image $\mathrm{Im}(f)$ de E par f est :

$$\mathrm{Im}(f) = \{f(v) \,/\, v \in E\}$$

Pour tout $v \in E$ on a $f(v) = \alpha i + \beta j + \gamma k$ où $\alpha = \frac{1}{3}(2x + 2y - z)$, $\beta = \frac{1}{3}(2x - y + 2z)$ et $\gamma = \frac{1}{3}(-x + 2y + 2z)$, alors le système $\{i, j, k\}$ engendre $f(E)$ qui est inclus dans E, donc $\mathrm{Im}(f) = E$ puisque E est de dimension 3.

(b) Déterminons une autre base (e_1, e_2, e_3) de E telle que l'on ait :

$$f(e_1) = e_1, \quad f(e_2) = e_2, \quad f(e_3) = -e_3.$$

soit $e_1 = ai + bj + ck$, $e_2 = a'i + b'j + c'k$ et $e_3 = a''i + b''j + c''k$, alors

$$\begin{aligned} f(e_1) &= \frac{1}{3}(2a + 2b - c)i + \frac{1}{3}(2a - b + 2c)j + \frac{1}{3}(-a + 2b + 2c)k \\ f(e_2) &= \frac{1}{3}(2a' + 2b' - c')i + \frac{1}{3}(2a' - b' + 2c')j + \frac{1}{3}(-a' + 2b' + 2c')k \\ f(e_3) &= \frac{1}{3}(2a'' + 2b'' - c'')i + \frac{1}{3}(2a'' - b'' + 2c'')j + \frac{1}{3}(-a'' + 2b'' + 2c'')k \end{aligned}$$

on cherche e_1 tel que $f(e_1) = e_1$, soit

$$\frac{1}{3}(2a + 2b - c)i + \frac{1}{3}(2a - b + 2c)j + \frac{1}{3}(-a + 2b + 2c)k = ai + bj + ck$$

comme $\{i, j, k\}$ est libre, alors

$$\left\{ \begin{array}{rl} \frac{1}{3}(2a + 2b - c) & = a \\ \frac{1}{3}(2a - b + 2c) & = b \\ \frac{1}{3}(-a + 2b + 2c) & = c. \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} a = 2b - c \\ (b, c) \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right.$$

on prend $b = c = 1$ alors $a = 1$, donc $e_1 = i + j + k$, ainsi on a bien $f(e_1) = e_1$. De la même façon, on veut $f(e_2) = e_2$ alors

$$\left\{ \begin{array}{rl} \frac{1}{3}(2a' + 2b' - c') & = a' \\ \frac{1}{3}(2a' - b' + 2c') & = b' \\ \frac{1}{3}(-a' + 2b' + 2c') & = c'. \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} a' = 2b' - c' \\ (b', c') \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right.$$

alors on prend $b' = 3$, $c' = 2$ alors $a' = 4$, donc $e_2 = 4i + 3j + 2k$.
on cherche e_3 tel que $f(e_3) = -e_3$, soit

$$\frac{1}{3}(2a'' + 2b'' - c'')i + \frac{1}{3}(2a'' - b'' + 2c'')j + \frac{1}{3}(-a'' + 2b'' + 2c'')k = -a''i - b''j - c''k$$

comme $\{i, j, k\}$ est libre, alors

$$\left\{ \begin{array}{rl} \frac{1}{3}(2a'' + 2b'' - c'') & = -a'' \\ \frac{1}{3}(2a'' - b'' + 2c'') & = -b'' \\ \frac{1}{3}(-a'' + 2b'' + 2c'') & = -c''. \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lcl} b'' & = & -2a'' \\ c'' & = & a'' \\ a'' & \in & \mathbb{R} \end{array} \right.$$

donc on prend $e_3 = \alpha(i - 2j + k)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$, d'où on a $f(e_3) = -e_3$.
Finalement, on a une base $\{e_1, e_2, e_3\}$ de E.

$\square$

Exercice 7
Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et (i, j, k) une base de E. Soit f l'endomorphisme de E tel que :

$$f(i) = \frac{1}{4}i + \frac{1}{8}j + \frac{\sqrt{11}}{8}k; \quad f(j) = \frac{1}{8}i + \frac{1}{16}j + \frac{\sqrt{11}}{16}k; \quad f(k) = \frac{\sqrt{11}}{8}i + \frac{\sqrt{11}}{16}j + \frac{11}{16}k.$$

1. Calculer $f \circ f$.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ est le plan d'équation : $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y + \frac{\sqrt{11}}{4}z = 0$.
3. Montrer que $\mathrm{Im}(f)$ est la droite D de vecteur directeur : $\frac{1}{2}i + \frac{1}{4}j + \frac{\sqrt{11}}{4}k$.

Solution :
Consifdérons E un espace vectoriel de dimension 3 et (i, j, k) une base de E. Soit f l'endomorphisme de E tel que :

$$f(i) = \frac{1}{4}i + \frac{1}{8}j + \frac{\sqrt{11}}{8}k; \quad f(j) = \frac{1}{8}i + \frac{1}{16}j + \frac{\sqrt{11}}{16}k; \quad f(k) = \frac{\sqrt{11}}{8}i + \frac{\sqrt{11}}{16}j + \frac{11}{16}k.$$

1. Calculons $f \circ f$: soit v un vecteur dans E tel que $v = xi + yj + zk$, alors

$$f \circ f(v) = xf \circ f(i) + yf \circ f(j) + zf \circ f(k)$$

car $f \circ f$ est linéaire. Donc pour calculer $f \circ f$, il suffit de calculer $f \circ f(i)$, $f \circ f(j)$ et $f \circ f(k)$.

$$\begin{aligned}
f \circ f(i) &= f(f(i)) \\
&= f\left(\frac{1}{4}i + \frac{1}{8}j + \frac{\sqrt{11}}{8}k\right) \\
&= \frac{1}{4}f(i) + \frac{1}{8}f(j) + \frac{\sqrt{11}}{8}f(k) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}i + \frac{1}{8}j + \frac{\sqrt{11}}{8}k\right) + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{8}i + \frac{1}{16}j + \frac{\sqrt{11}}{16}k\right) + \frac{\sqrt{11}}{8}\left(\frac{\sqrt{11}}{8}i + \frac{\sqrt{11}}{16}j + \frac{11}{16}k\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{11}{16}\right)i + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{11}{16}\right)j + \frac{\sqrt{11}}{8}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{11}{16}\right)k \\
&= \frac{1}{4}i + \frac{1}{8}j + \frac{\sqrt{11}}{8}k \\
&= f(i)
\end{aligned}$$

car $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{11}{16} = 1$. D'où $f \circ f(i) = f(i)$.
De la même façon, on trouve que $f \circ f(j) = f(j)$ et $f \circ f(k) = f(k)$.
Pour tout $v \in E$ on a

$$\begin{aligned}
f \circ f(v) &= xf \circ f(i) + yf \circ f(j) + zf \circ f(k) \\
&= xf(i) + yf(j) + zf(k) \\
&= f(xi + yj + zk) \\
&= f(v)
\end{aligned}$$

car f est linéaire, d'où $f \circ f(v) = f(v)$ pour tout $v \in E$, finalement $f \circ f = f$, ce qui prouve que f est un projecteur.

2. Montrons que $\mathrm{Ker}(f)$ est le plan d'équation : $\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}y+\frac{\sqrt{11}}{4}z=0$.
Soit $v\in E$, on a

$$\begin{array}{rcl} f(v) & = & f(xi+yj+zk) \\ & = & xf(i)+yf(j)+zf(k) \\ & = & x\left(\dfrac{1}{4}i+\dfrac{1}{8}j+\dfrac{\sqrt{11}}{8}k\right)+y\left(\dfrac{1}{8}i+\dfrac{1}{16}j+\dfrac{\sqrt{11}}{16}k\right)+z\left(\dfrac{\sqrt{11}}{8}i+\dfrac{\sqrt{11}}{16}j+\dfrac{11}{16}k\right) \\ & = & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}y+\dfrac{\sqrt{11}}{4}z\right)i+\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}y+\dfrac{\sqrt{11}}{4}z\right)j+\dfrac{\sqrt{11}}{4}\left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}y+\dfrac{\sqrt{11}}{4}z\right)k \end{array}$$

on a

$$\mathrm{Ker}(f)=\{v\in E\,/\,f(v)=0_E\}$$

or $f(v)=0_E$ implique

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}y+\frac{\sqrt{11}}{4}z\right)i+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}y+\frac{\sqrt{11}}{4}z\right)j+\frac{\sqrt{11}}{4}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}y+\frac{\sqrt{11}}{4}z\right)k=0_E$$

comme le système $\{i,j,k\}$ est libre, alors

$$\mathrm{Ker}(f)\ :\ \left\{\begin{array}{rcl} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}y+\frac{\sqrt{11}}{4}z\right) & = & 0 \\ \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}y+\frac{\sqrt{11}}{4}z\right) & = & 0 \\ \frac{\sqrt{11}}{4}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}y+\frac{\sqrt{11}}{4}z\right) & = & 0, \end{array}\right.$$

d'où $\mathrm{Ker}(f)$ est le sous-espace vectoriel de E d'équation

$$\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}y+\frac{\sqrt{11}}{4}z=0$$

soit $\mathrm{Ker}(f)$ est le plan vectoriel d'équation caractéristique $\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}y+\frac{\sqrt{11}}{4}z=0$.

3. Montrons que $\mathrm{Im}(f)$ est la droite D de vecteur directeur : $\frac{1}{2}i+\frac{1}{4}j+\frac{\sqrt{11}}{4}k$.
On a

$$\mathrm{Im}(f)=\{f(v)\,/\,v\in E\}$$

comme

$$\begin{array}{rcl} f(v) & = & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}y+\dfrac{\sqrt{11}}{4}z\right)i+\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}y+\dfrac{\sqrt{11}}{4}z\right)j+\dfrac{\sqrt{11}}{4}\left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}y+\dfrac{\sqrt{11}}{4}z\right)k \\ & = & \left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}y+\dfrac{\sqrt{11}}{4}z\right)\left(\dfrac{1}{2}i+\dfrac{1}{4}j+\dfrac{\sqrt{11}}{4}k\right) \\ & = & \alpha\left(\dfrac{1}{2}i+\dfrac{1}{4}j+\dfrac{\sqrt{11}}{4}k\right) \end{array}$$

où $\alpha=\left(\frac{1}{2}i+\frac{1}{4}j+\frac{\sqrt{11}}{4}k\right)\in\mathbb{R}$.
D'où

$$\mathrm{Im}(f)=\left\{\alpha\left(\frac{1}{2}i+\frac{1}{4}j+\frac{\sqrt{11}}{4}k\right)\,/\,\alpha\in\mathbb{R}\right\}$$

d'où $\mathrm{Im}(f)$ est le sous-espace vectoriel engendré par le vecteur $u=\frac{1}{2}i+\frac{1}{4}j+\frac{\sqrt{11}}{4}k$, soit $\mathrm{Im}(f)$ est la droite vectorielle de vecteur directeur $u=\frac{1}{2}i+\frac{1}{4}j+\frac{\sqrt{11}}{4}k$.

$\square$

Exercice 8
Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et (i, j, k) une base de E. On désigne par f l'endomorphisme de E tel que :

$$f(i) = \frac{1}{2}i - \frac{1}{2}j; \quad f(j) = -\frac{1}{2}i + \frac{1}{2}j \quad \text{et} \quad f(k) = \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}j + k.$$

1. Montrer que $f \circ f = f$.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$.
3. Déterminer l'ensemble des points fixes de f.

Solution :
On considère E un espace vectoriel de dimension 3 et (i, j, k) une base de E. Soit f l'endomorphisme de E tel que :

$$f(i) = \frac{1}{2}i - \frac{1}{2}j; \quad f(j) = -\frac{1}{2}i + \frac{1}{2}j \quad \text{et} \quad f(k) = \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}j + k.$$

1. Montrons que $f \circ f = f$: soit v un vecteur dans E tel que $v = xi + yj + zk$, alors

$$f \circ f(v) = xf \circ f(i) + yf \circ f(j) + zf \circ f(k)$$

car $f \circ f$ est linéaire. Donc pour calculer $f \circ f$, il suffit de calculer $f \circ f(i)$, $f \circ f(j)$ et $f \circ f(k)$.

$$\begin{aligned}
f \circ f(i) &= f(f(i)) \\
&= f\left(\frac{1}{2}i - \frac{1}{2}j\right) \\
&= \frac{1}{2}f(i) - \frac{1}{2}f(j) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}i - \frac{1}{2}j\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}i + \frac{1}{2}j\right) \\
&= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)i + \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right)j \\
&= \frac{1}{2}i - \frac{1}{2}j \\
&= f(i)
\end{aligned}$$

D'où $f \circ f(i) = f(i)$.
De la même façon, on trouve que $f \circ f(j) = f(j)$ et $f \circ f(k) = f(k)$.
Pour tout $v \in E$ on a

$$\begin{aligned}
f \circ f(v) &= xf \circ f(i) + yf \circ f(j) + zf \circ f(k) \\
&= xf(i) + yf(j) + zf(k) \\
&= f(xi + yj + zk) \\
&= f(v)
\end{aligned}$$

car f est linéaire, d'où $f \circ f(v) = f(v)$ pour tout $v \in E$, finalement $f \circ f = f$, ce qui prouve que f est un projecteur.

2. Déterminons le noyau $\mathrm{Ker}(f)$ de f : Soit $v \in E$, on a

$$\begin{array}{rcl} f(v) & = & f(xi + yj + zk) \\ & = & xf(i) + yf(j) + zf(k) \\ & = & x\left(\frac{1}{2}i - \frac{1}{2}j\right) + y\left(-\frac{1}{2}i + \frac{1}{2}j\right) + z\left(\frac{1}{2}i + \frac{1}{2}j + k\right) \\ & = & \frac{1}{2}(x - y + z)\, i + \frac{1}{2}(-x + y + z)\, j + zk \end{array}$$

on a

$$\mathrm{Ker}(f) = \{v \in E \,/\, f(v) = 0_E\}$$

or $f(v) = 0_E$ implique

$$\frac{1}{2}(x - y + z)\, i + \frac{1}{2}(-x + y + z)\, j + zk = 0_E$$

comme le système $\{i, j, k\}$ est libre, alors

$$\mathrm{Ker}(f) \ : \ \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{1}{2}(x - y + z) & = & 0 \\ \frac{1}{2}(-x + y + z) & = & 0 \\ z & = & 0, \end{array} \right.$$

d'où $\mathrm{Ker}(f)$ est le sous-espace vectoriel de E d'équation

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x - y & = & 0 \\ z & = & 0, \end{array} \right.$$

soit $\mathrm{Ker}(f)$ est la droite vectorielle d'équation caractéristique $\left\{ \begin{array}{rcl} x - y & = & 0 \\ z & = & 0, \end{array} \right.$ ou soit $\mathrm{Ker}(f)$ est la droite vectorielle de vecteur directeur $u = i + j$.

3. Déterminons l'ensemble des points fixes de f, soit les vecteurs $v \in E$ tels que $f(v) = v$. Soit D l'ensemble des vecteurs $v \in E$ tels que $f(v) = v$

$$f(v) = v \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}(x - y + z)\, i + \frac{1}{2}(-x + y + z)\, j + zk = xi + yj + zk$$

comme le système $\{i, j, k\}$ est libre, alors

$$\mathcal{D} \ : \ \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{1}{2}(x - y + z) & = & x \\ \frac{1}{2}(-x + y + z) & = & y \\ z & = & z, \end{array} \right.$$

donc

$$\mathcal{D} \ : \ \left\{ \begin{array}{rcl} z & = & x + y \\ z & \in & \mathbb{R}, \end{array} \right.$$

D'où $\mathcal{D} = \{\alpha w_1 + \beta w_2 \,/\, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$ où $w_1 = i + j$ et $w_2 = j + k$, ceci puisque $v \in \mathcal{D}$ est équivalent à

$$v = xi + yj + zk = x(i + k) + y(j + k)$$

ce qui prouve que $\mathcal{D}$ est le plan vectoriel qui a pour base $\{i + k, j + k\}$, soit

$$\mathcal{D} = \mathrm{Vect}\{i + k, j + k\}$$

□